平成15年度東北大学電気通信研究所共同プロジェクト研究会

「学際的新領域プラズマの基礎と応用」

東北大学大学院工学研究科

2003/12/04

実験室プラズマにおける3次元波動解析

京都大学大学院工学研究科 福山 淳

- プラズマ中の波動伝播解析
- モード展開法による3次元波動伝播解析
- 有限要素法による3次元波動伝播解析
- 微積分方程式による電磁波吸収の解析
- 微積分方程式による電子サイクロトロン波吸収の解析
- まとめと今後の課題

プラズマ中の波動伝播解析

- さまざまなプラズマ解析の基礎
- •解析コードの統合化:波動伝播解析は必須
 - 核燃焼プラズマ統合コード
 - 核燃焼プラズマの振る舞いの予測
 - 理論に基づき,実験データで検証されたコードの連携
 - 平衡,輸送,安定性,波動伝播,速度分布,実験データベース
 - **コアコードの開発:**TASK
 - 有限要素法によるプラズマ解析コード: PAF
 - プロセスプラズマ,基礎プラズマ実験の解析
 - 有限要素法を用いた解析コードの統合
 - 波動解析,輸送解析,流体解析,速度分布解析,粒子シミュレーション

波動伝播解析の分類

- 幾何光学解析
 - 光線追跡法
 - ○ビーム追跡法
 - ○ビーム伝搬法
- 波動光学解析
 - ○モード展開法
 - 差分法
 - 有限要素法
- 時間発展解析
 - ○流体的モデル
 - 運動論的モデル
 - 粒子シミュレーション

- 誘電率テンソル
 - 冷たいプラズマモデル
 - ○波-粒子共鳴相互作用
 - ○有限ラーモア半径効果
 - 有限軌道幅効果
 - ドリフト運動効果
- 誘電率テンソルの形式
 - 非演算子
 - 微分演算子
 - 積分演算子

トロイダルプラズマにおける波動解析

●背景

- 波動による加熱と電流駆動:速波,アルヴェン波
 低周波不安定性:アルヴェン固有モード
 計測:イオンサイクロトロン輻射
- これまでに行ってきた解析
 - トカマクプラズマ(A. Fukuyama et al., Comp. Phys. Rep. 4(1986) 137)
 一軸対称(2次元),有限要素法
 - **直線ヘリカルプラズマ(**A. Fukuyama et al., Nucl. Fusion 26(1986) 151
)
 - ヘリカル対称(2次元),有限要素法
 - トロイダルヘリカルプラズマ: TASK/WM
 - MHD **平衡解析から得られる磁気面座標**
 - マクスウェル方程式の境界値問題.プラズマの応答は誘電率テンソル
 - ポロイダル方向とトロイダル方向はフーリエモード展開,径方向には差分

磁気面座標





波動方程式

• 波動電界 *E* に対する定常マクスウェル方程式(角周波数 ω ,光速 *c*) $\nabla \times \nabla \times E = \frac{\omega^2}{c^2} \overleftarrow{\epsilon} \cdot E + i \omega \mu_0 j_{ext}$

● 非直交座標系における波動方程式(半径方向成分)

 $(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E})^{1} = \frac{1}{J} \left[\frac{\partial}{\partial x^{2}} \left\{ \frac{g_{31}}{J} \left(\frac{\partial E_{3}}{\partial x^{2}} - \frac{\partial E_{2}}{\partial x^{3}} \right) + \frac{g_{32}}{J} \left(\frac{\partial E_{1}}{\partial x^{3}} - \frac{\partial E_{3}}{\partial x^{1}} \right) + \frac{g_{33}}{J} \left(\frac{\partial E_{2}}{\partial x^{1}} - \frac{\partial E_{1}}{\partial x^{2}} \right) \right\}$ $-\frac{\partial}{\partial x^{3}} \left\{ \frac{g_{21}}{J} \left(\frac{\partial E_{3}}{\partial x^{2}} - \frac{\partial E_{2}}{\partial x^{3}} \right) + \frac{g_{22}}{J} \left(\frac{\partial E_{1}}{\partial x^{3}} - \frac{\partial E_{3}}{\partial x^{1}} \right) + \frac{g_{23}}{J} \left(\frac{\partial E_{2}}{\partial x^{1}} - \frac{\partial E_{1}}{\partial x^{2}} \right) \right\} \right]$

 $\circ(x^1,x^2,x^3)$ はそれぞれ座標 (ψ,θ,φ) を表す.

○ ポロイダル成分とトロイダル成分も同様

プラズマ応答

- 誘電率テンソル $\stackrel{\leftrightarrow}{\epsilon}$ は,通常静磁界を z 軸とする規格化直交座標系で記述
- 局所的な規格化直交座標系 $\hat{e}_s = \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|}, \quad \hat{e}_b = \hat{e}_h \times \hat{e}_\psi, \quad \hat{e}_h = \frac{B_0}{|B_0|}$
- 座標変換行列: $\overset{\leftrightarrow}{\mu}$

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \stackrel{\leftrightarrow}{\mu} \begin{pmatrix} E_s \\ E_b \\ E_h \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\leftrightarrow}{\mu} \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{g^{11}}} & \frac{d}{\sqrt{Jg^{11}}} & c_2g_{12} + c_3g_{13} \\ 0 & c_3J\sqrt{g^{11}} & c_2g_{22} + c_3g_{23} \\ 0 & -c_2J\sqrt{g^{11}} & c_2g_{32} + c_3g_{33} \end{pmatrix}$$

$$c_2 = B^{\theta}/B, \quad c_2 = B^{\phi}/B \\ d = c_2(g_{23}g_{12} - g_{22}g_{31}) + c_3(g_{33}g_{12} - g_{32}g_{31}) \\ g^{11} = (g_{22}g_{33} - g_{23}g_{32})/J^2$$

●非直交座標系における誘電テンソル

$$\stackrel{\leftrightarrow}{\epsilon} = \stackrel{\leftrightarrow}{\mu} \cdot \stackrel{\leftrightarrow}{\epsilon}_{sbh} \cdot \stackrel{\leftrightarrow}{\mu}$$

フーリエ展開

- ポロイダル方向とトロイダル方向については,フーリエ級数により展開
- 電界,マクスウェル方程式の左辺,形状および媒質の変化を表す係数をそれぞれ

$$E(\psi,\theta,\varphi) = \sum_{mn} E_{mn}(\psi) e^{i(m\theta + n\varphi)}$$

$$G(\psi, \theta, \varphi) = \sum_{lk} G_{lk}(\psi) e^{i(l\theta + kN_p\varphi)}$$

 $J(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) = G(\psi, \theta, \varphi) E(\psi, \theta, \varphi) = \sum_{m'n'} [J(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E})]_{m'n'} e^{i(m'\theta + n'\varphi)}$

モード間結合(N_h: トロイダル方向のヘリカルコイル回転数)

モード番号	トロイダル方向	ポロイダル方向
電界ベクトル E	n	m
媒質変化	$kN_{ m h}$	l
$J(\boldsymbol{ abla} imes \boldsymbol{ abla} imes \boldsymbol{ abla})$	n'	m'
関係式	$n' = n + kN_{\rm h}$	m' = m + l

平行方向の波数

• プラズマ誘電テンソル $\overleftarrow{\epsilon}(\psi, \theta, \varphi, k_{\parallel}^{m''n''})$ は, プラズマ分散関数 $Z[(\omega - N\omega_{cs})/k_{\parallel}^{m''n''}v_{Ts}]$ を通して, 磁力線方向の波数 $k_{\parallel}^{m'',n''}$ に依存する.

$$k_{\parallel}^{m'',n''} = -i\hat{\boldsymbol{e}}_{h}\cdot\boldsymbol{\nabla} = -i\hat{\boldsymbol{e}}_{h}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \boldsymbol{\nabla}\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}) = -i\hat{\boldsymbol{e}}_{h}\cdot(\boldsymbol{e}^{2}\frac{\partial}{\partial\theta} + \boldsymbol{e}^{3}\frac{\partial}{\partial\varphi}) = m''\frac{B^{\theta}}{|B|} + n''\frac{B^{\varphi}}{|B|}$$

• 誘電テンソル $\overleftarrow{\epsilon}_{sbh}$ に対応する電界のフーリェ成分 $(J \, \overleftarrow{\epsilon} \cdot E)^i = J \, \overleftarrow{g}^{-1} \cdot \overleftarrow{\mu} \cdot \overleftarrow{\epsilon}_{sbh} \cdot \overrightarrow{\mu}^{-1} \cdot E_i$ $m' \qquad \ell_3 \qquad \ell_2 \qquad \ell_1 \qquad m$ $n' \qquad k_3 \qquad k_2 \qquad k_1 \qquad n$

したがって

$$m'' = m + \ell_1 + \frac{1}{2}\ell_2 \qquad n'' = n + k_1 + \frac{1}{2}k_2$$
$$m' = m + \ell_1 + \ell_2 + \ell_2 \qquad n' = n + k_1 + k_2 + k_3$$

並列処理による TASK/WM の高速化

- 計算機クラスターによる並列処理 (Fortran77 + MPI ライブラリ)
 - ○並列処理による係数行列計算の高速化
 - ○並列処理による行列方程式解法の高速化
 - ○係数配列の分散記憶による大規模化
- 経過時間のプロセッサ数依存性(16 モード,径方向 50 点)



典型的なポロイダル分布





吸収パワー密度: 少数イオン



周波数依存性

●吸収パワー密度:ポロイダル分布



● 吸収パワー密度: 径方向分布



プラズマ解析統合コード: PAF

- •目的:高周波プラズマ生成の自己完結的な解析
 - ○任意の装置形状
 - 現実的な高周波励起
 - 流体・粒子ハイブリッドモデル
 - ○並列化による高速計算
- **PAF**: Plasma Analysis with **Finite element method**
 - WF: 定常波動解析 (3D)
 - MF: 時間発展波動解析 [計画中]
 - **TF**: **拡散型輸送解析** (2D)
 - FF: 流体型輸送解析 [計画中]
 - **PF**: 粒子シミュレーション (2D)
 - MG: 要素分割
 - MX: 並列型行列方程式解法

PAF/WF: 3次元波動解析コード

- 周波数 ω の波動電場: $\tilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) e^{-i\omega t}$
- マクスウェル方程式:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \stackrel{\leftrightarrow}{\epsilon} \cdot \boldsymbol{E} = \mathrm{i} \, \omega \mu_0 \boldsymbol{j}_{\mathrm{ext}}$$

 $\circ \overleftarrow{\epsilon}$: 誘電率テンソル(衝突を含めた冷たいプラズマ近似)

• 励起:

○(電流分布の与えられた)アンテナ
○(同軸,円形,矩形)導波管
○ 電極

•数値解法

- ○四面体要素を用いた有限要素法
- 変数:辺上の電界の接線成分

軸対称表面波の励起

- 2 次元解析
 - ° H. Kousaka and K. Ono: JJAP 41 (2002) 2199
 - ○マイクロ波プラズマ源内の軸対称2次元電磁場解析
 - FDTD: 時間領域有限差分
 - 同軸導波管による励起: *f* = 2.45 GHz

3次元解析における要素分割



2次元解析と3次元解析の比較:*E_z(r,z)*



2次元解析と3次元解析の比較:*E_z(r,z)*



2次元解析と3次元解析の比較: *E_z(z)*



● 高密度の場合には,空間解像度が不足

多重ループアンテナによる ICP

• 円柱プラズマ

- \circ Diameter=0.48 m
- \circ Height=0.3 m

• 高周波

• Frequency=13.56 MHz

Antenna





Plasma

アンテナ直下の電磁場と吸収パワー





EXR(XY) Z=0.16 MAX= 1.43E-01 MIN=-1.43E-01 STP= 1.25E-02



EZR(XY) Z=0.16 MAX= 2.44E-02 MIN=-2.44E-02 STP= 2.50E-03



EXI(XY) Z=0.16 MAX= 7.56E+00 MIN=-7.56E+00 STP= 1.00E+00



EZI(XY) Z=0.16 MAX= 1.79E+00 MIN=-1.79E+00 STP= 2.50E-01



EYR(XY) Z=0.16 MAX= 1.44E-01 MIN=-1.44E-01 STP= 1.25E-02



P1C(XY) Z=0.16 MAX= 8.61E+01 MIN= 0.00E+00 STP= 5.00E+00



EYI(XY) Z=0.16 MAX= 7.64E+00 MIN=-7.64E+00 STP= 1.00E+00



P2C(XY) Z=0.16 MAX= 3.94E-05 MIN= 0.00E+00 STP= 2.50E-06

x = 0断面における電磁場と吸収パワー

RF	= ′	13.560	BB	= 0000	M= 2	2 0 0	260	IJ	AJ	PHASE	R	Х
NNMA	X=	1488	XYZ	MAX= 0.2	240 0.	240	0.300	1	0.3	0.0	6.839E-03	1 * 452E+00
NEMA	X=	7020	XYZ	MIN = -0.2	240 -0.	240	0.000	2	0.3	0.0	1.929E-02	1.756E+00
NK	NM	PABS	Nł	K NM PABS				З	0.3	0.0	2.785E-02	2.433E+00
1	0	2.90E-	-01					4	1.0	0.0	1.333E-01	1 * 430E+01
NS		PA	ΡZ	PN	PZCL	PAE	3S	5	1.0	0.0	1 * 030E-01	1.365E+01
1	5,	49E-04	-1 .	5.00E-03	0.03	2.90	DE-01					
2	З,	.99E+01	1 .	5.00E-03	0.00	1 . 33	3E-07					





微積分方程式による波動伝播解析

●目的:不均一方向に伝播する波動の波-粒子共鳴相互作用

•原理:

- 粒子軌道: x = x' + v(t t')
- \circ 速度 v の粒子は t' t 秒前の位置 x' における電界 E(x') の影響を受ける.
- •線形化された Vlasov 方程式: $\frac{\mathrm{d}f(x',t')}{\mathrm{d}t} = -\frac{q}{m}E(x',t')\frac{\partial f_0(v)}{\partial v}$

• 摂動分布関数:
$$f(x,v,t) = \frac{qn_0}{(2\pi T/m)^{3/2}T} \int_{-\infty}^t \mathrm{d}t' v E(x',t') \exp\left(-\frac{mv^2}{2T}\right)$$

。誘起電流:
$$j(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}v \, qv f(x,v,t)$$

 $\circ f(x,v,t)$ を代入すると

$$j(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' K(x-x',t-t') E(x',t')$$
$$K(x-x',t-t') = \frac{qn_0}{(2\pi T/m)^{3/2}T} \int_{-\infty}^{t} dt' \frac{x-x'}{t-t'} \exp\left[-\frac{m}{2T} \left(\frac{x-x'}{t-t'}\right)^2\right]$$

密度勾配をもつプラズマ中の波動伝播

• 斜め入射電磁波によるプラズマ波の励起と吸収

○密度分布:
$$n(x) = n_0 e^{-\kappa x}$$

○静電ポテンシャル: $\Phi(x) = \frac{\kappa T}{q} x$
○粒子運動:静電界による加速・減速
• 基礎方程式: $\frac{1}{\beta^2} \nabla \times \nabla \times E(x) - \int_{-\infty}^{\infty} dx' \overleftarrow{\epsilon} (x - x') E(x') = 0$
 $\overleftarrow{\epsilon} (x - x') = \delta(x - x') \overrightarrow{I} i \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2} e^{-\kappa(x + x')}$
 $\times \begin{pmatrix} (x - x')^2 U_{-2} - \kappa^2 U_2 & -i n_y \beta [(x - x') U_0 - \kappa U_2] & 0 \\ -i n_y \beta [(x - x') U_0 + \kappa U_2] & U_0 - n_y^2 \beta^2 U_2 & 0 \\ 0 & 0 & U_0 \end{pmatrix}$
 $U_n = U_n \left(\omega(x - x') / \sqrt{T/m}, \sqrt{\kappa^2 + n_y^2 \beta^2}, \sqrt{T/m} \right), \quad \beta = \sqrt{T/m}/c$
 $U_n(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} d\tau \tau^{n-1} \exp \left[-\frac{1}{2\tau^2} - \frac{1}{2}\eta^2 \tau^2 + i\tau \right]$

解析例

• 密度:
$$(\omega_{\rm p}^2/\omega^2)_{\rm max} = 2, \ (\omega_{\rm p}^2/\omega^2)_{\rm min} = 0,$$

- •入射角: n_y = 0.2
- • 温度: β = 0.1



•吸収率: 37.7%

吸収率の入射角依存性



不均一磁場中の波動伝播

● 電子サイクロトロン共鳴における吸収とモード変換 •不均一磁場: $B(z) = B_0\left(1 + \frac{x}{r}\right)$ • 基礎方程式: $\frac{1}{\beta^2} \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E}(x) - \int^{\infty} dz' \stackrel{\leftrightarrow}{\epsilon}(z, z') \boldsymbol{E}(z') = 0$ $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}(z,z') = \delta(z-z') \overset{\leftrightarrow}{I} \mathrm{i} \frac{\omega_{\mathrm{p0}}^2}{\omega^2} \times \left(\begin{array}{ccc} (\chi_+\chi_-)/2 & -\mathrm{i} (\chi_-\chi_-)/2 & 0\\ \mathrm{i} (\chi_-\chi_-)/2 & (\chi_+\chi_-)/2 & 0\\ 0 & 0 & \chi_0 \end{array} \right)$ $\chi_{\pm} = \frac{(1+\kappa z)^{3/2}(1+\kappa z')^{3/2}}{(1+\kappa (z+z')/2)^2} U_0(\xi_{\pm})$ $\chi_0 = \frac{(1+\kappa z)(1+\kappa z')}{(1+\kappa(z+z')/2)} \left[\xi U_2(\xi) - \frac{\kappa^2}{2(1+\kappa(z+z')/2)^2} U_{-2}(\xi) \right]$ $\xi = \frac{\omega(z - z')}{\sqrt{T/m}}, \quad \xi_{\pm} = \frac{(\omega + \Omega)(z - z')}{\sqrt{T/m}}, \quad \Omega = \frac{qB_0}{m} (1 + (z + z')/2L), \quad \kappa = \frac{\sqrt{T/m}}{\omega L}$ $U_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\theta}{\theta^{n+1}} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{\xi^2}{\theta^2} + \mathrm{i}\,\theta\right]$





標準パラメータ:R入射



低密度 $\omega_{\rm pe}^2/\omega^2 = 0.1$:長波長:反射増加



斜め入射 $n_y = 0.2$: R入射: モード変換増大



斜め入射 $n_y = 0.5$: R入射: モード変換増大



まとめと今後の課題

- トロイダルプラズマにおける3次元波動解析により、イオンサイクロトロン波の伝搬やアルヴェン固有モードの解析が可能になった。
 - 有限ラーモア半径効果,有限軌道幅効果
 - 3次元MHD平衡との結合:要改善
- 有限要素法を用いた3次元波動伝播解析により,現実的な配位における電子サイクロトロン波の吸収や表面波の励起が解析可能になった.
 - ヘリコン波の解析には積分形誘電率が必要?
 - プラズマ生成の解析
- 微積分方程式を用いた1次元波動伝播解析により,不均一プラズマにおけるランダウ減衰やサイクロトロン減衰・モード変換の解析が可能になった.
 - ○より詳しいパラメータ依存性解析,解析モデル
 - 2 次元解析, 3 次元解析への拡張